

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### 6 КЛАСС

1. Карлсон купил в буфете 5 стаканов чая и 3 пирожных. Одно пирожное обошлось ему в 20% от стоимости общей покупки. Во сколько процентов обошёлся ему стакан чая?
2. Миша, Антон, Катя и Наташа устроили турнир по настольному теннису. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:  
Миша: Я не был ни первым, ни последним.  
Антон: Я не был последним.  
Катя: Я была первой.  
Наташа: Я была последней.  
Известно, что кто-то один из детей солгал, а трое сказали правду. Кто занял третье место, если известно, что это был мальчик?
3. В некоторые из клеток таблицы  $3 \times 3$  записываются крестики. Требуется, чтобы при этом в любой из квадратов  $2 \times 2$  попал ровно один такой крестик. Сколько имеется всевозможных способов заполнения таблицы с соблюдением условий?
4. По кругу расставлено 100 игрушек трёх видов: куклы, плюшевые медвежата и самолётики. Известно, что среди пяти подряд стоящих игрушек должна быть хотя бы одна кукла, а среди семи подряд стоящих — хотя бы один медвежонок. Каково наибольшее возможное число самолётиков среди ста игрушек?
5. Из доски  $8 \times 8$  по клеточкам вырезали 10 прямоугольников  $1 \times 2$ . Обязательно ли из оставшейся части можно вырезать прямоугольник  $1 \times 3$ ?

**За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов**

**Максимальная сумма баллов равна 35**

# **Всероссийская олимпиада школьников по математике**

## **II (муниципальный) этап**

**2018 – 2019 учебный год**

### **7 КЛАСС**

1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 70% примесей, а второй 5% примесей. В каком отношении следует соединить эти сплавы, чтобы получился новый сплав, в котором содержится 20% примесей?
2. Найти наибольшее четырёхзначное число без нулей, произведение цифр которого делится на их сумму.
3. Таня стоит на берегу речки. У неё есть два кувшина: один на пять литров, а объём другого — то ли три, то ли четыре литра. Как Таня может определить ёмкость второго кувшина?
4. Можно ли раскрасить доску  $5 \times 5$  в три цвета так, чтобы у каждой клетки, кроме угловых, были соседи всех трех цветов?
5. Можно ли из чисел от 1 до 10, взятых в некотором порядке, так составить сумму, что для любого  $k$  от 1 до 10, сумма первых  $k$  слагаемых будет нацело делиться на  $k$ -е слагаемое?

**За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов**

**Максимальная сумма баллов равна 35**

# **Всероссийская олимпиада школьников по математике**

## **II (муниципальный) этап**

**2018 – 2019 учебный год**

### **8 КЛАСС**

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 при помощи знаков арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и скобок требуется получить число 2018. Можно ли этого добиться, не переставляя цифры, и не группируя их (то есть не используя многозначных чисел)?
2. За круглым столом сидят гномы. Они по кругу передают горшок с золотыми монетами. Первый гном взял из горшка 1 монету, второй – 2, третий – 3 и так далее. Каждый следующий брал ровно на одну монету больше. Оказалось, что на четвертом круге гномы суммарно взяли на 507 монет больше, чем на первом. Какое число гномов могло сидеть за столом?
3. По кругу было записано 8 попарно различных натуральных чисел. Между соседними числами написали их сумму, а старые числа стёрли. Могли ли получиться числа 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, взятые в каком-нибудь порядке?
4. В клетчатом квадрате закрашено несколько клеток. Верно ли, что квадрат можно разрезать на прямоугольники так, чтобы в каждом прямоугольнике была ровно одна закрашенная клетка?
5. Каждая клетка квадрата  $13 \times 13$  окрашена в красный или синий цвет. Клетка называется доминирующей, если в её строке, а также в её столбце больше половины клеток её цвета. Могло ли доминирующих клеток оказаться меньше 25?

**За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов**

**Максимальная сумма баллов равна 35**

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### 9 КЛАСС

1. Может ли число с суммой цифр 17 нацело делиться на число с суммой цифр 16?
2. Дано 20 камней, веса которых отличаются друг от друга. Существует ли способ нахождения самого легкого и самого тяжелого камня, требующий 28 взвешиваний на чашечных весах без гирь?
3. На покупку тетрадей в клетку и в линейку можно затратить не более 140 рублей. Тетрадь в клетку стоит 3 руб., в линейку — 2 руб. Число купленных тетрадей в клетку не должно отличаться от числа тетрадей в линейку более, чем на 9. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество тетрадей, при этом тетрадей в линейку нужно купить как можно меньше. Сколько тетрадей в клетку и сколько в линейку можно купить при указанных условиях?
4. Высота  $АН$ , биссектриса  $ВL$  и медиана разбивают треугольник  $ABC$  на 7 частей. Может ли получиться так, что с одной стороны от какой-то из этих прямых все части имеют одну площадь, а с другой стороны — другую, но тоже одинаковую?
5. Можно ли привести пример натуральных чисел  $a < b < c < d$  таких, что каждое из чисел  $ab + cd$ ,  $ac + bd$ ,  $ad + bc$  окажется точным квадратом?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

**Всероссийская олимпиада школьников по  
математике**

**II (муниципальный) этап**

**2018 – 2019 учебный год**

**10 КЛАСС**

1. Может ли сумма косинусов двух углов треугольника быть отрицательной?
2. Можно ли найти три таких попарно различных целых числа, что, если подставить их вместо звёздочек в уравнение  $*x^2 + *x + * = 0$  (в любом порядке), то оно обязательно будет иметь два различных рациональных корня?
3. Доказать неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2018^2} < 1,7.$$

4. В равнобедренном треугольнике  $KLM$  углы при основании  $KM$  равны  $50^\circ$ , а точка  $O$  внутри треугольника расположена так, что угол  $OKL$  равен  $20^\circ$ , а угол  $OML$  равен  $40^\circ$ . Найти величину угла  $KOL$ .
5. Клетчатую доску  $97 \times 25$  разрезали на  $n$  прямоугольников  $1 \times 3$  и  $m$  прямоугольников  $1 \times 5$ . Какое наименьшее значение может принимать выражение  $|m - n|$ ?

**За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов**

**Максимальная сумма баллов равна 35**

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### 11 КЛАСС

1. Имеет ли решения уравнение  $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{\pi}{4}$ ?
2. Существует ли треугольник, у которого длины всех сторон и всех высот — нечётные целые числа?
3. На столе лежат грузы массой 150, 151, 152, ..., 200 граммов (по одному грузу каждой массы). Разрешается выбрать один или несколько грузов и взвесить их. Сколько различных значений масс можно получить таким образом?
4. В компании из 6 человек некоторые группами по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что обязательно найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?
5. В треугольнике  $BCD$  известны длины сторон:  $BC = 5$ ,  $CD = 6$ ,  $BD = 7$ . Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Найти наибольший из радиусов окружностей.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для решения задачи, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и плохо поддается формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Многие задачи данного тура близки к типовым школьным задачам, поэтому их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Конкретные предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В задачах 1 V-VI классов для полного решения достаточно одного конкретного примера, без объяснения того, как он был получен.

В задаче 2 V класса, при указании способа угадывания за 49 вопросов, без доказательства того, что это число наименьшее, можно давать от 3 до 4 баллов. Просто ответ без объяснений баллами не оценивается.

В задачах 3, 5 V класса достаточно примера замощения.

В задаче 4 V-VI классов, за предъявление примера с 8 (11) игрушками даётся 3 балла, и ещё 4 присуждается за доказательство того, что это значение не может быть уменьшено.

В задаче 2 VI класса за верный ответ без объяснения можно давать до 2 баллов.

В задаче 3 VI класса достаточно верного примера расположения гномов за столом (пример не обязан совпадать с приведённым в решении). То же для задачи 5 VI класса.

В задачах 1, 5 VII класса достаточно правильно найденного примера (описания или рисунка).

В задаче 2 VII класса за верный пример с четырьмя простыми суммами цифр даётся 3 балла. Ещё 4 – за доказательство того, что все пять сумм простыми быть не могут.

В задаче 3 VII класса требуется не только ответ, но и обоснованное рассуждение, почему это так.

В задаче 4 VII класса за правильный ответ можно давать до 3 баллов.

В задаче 1 VIII класса за правильный ответ даётся 1 - 2 балла. Остальное – за обоснование того, почему все большие числа представимы.

В задаче 1 VIII класса за правильный ответ можно давать до 2 баллов. Ещё один балл – за попытки рассмотрения разных случаев.

В задаче 3 VIII класса достаточно верного примера четвёрки чисел (не обязательно такого, как в решении). За попытки исследования можно давать до 2 баллов.

Задаче 4 VIII класса – школьного типа. Она может быть также решена графически. За верный ответ без полного объяснения – до 2 баллов.

В задаче 5 VIII класса за верный ответ даётся 2 балла. За идею удвоения и попытку описания – ещё 2 - 3 балла, если рассуждение представляет ценность.

Задачи 1, 4 IX класса оцениваются по школьным критериям.

В задачах 2, 5 IX класса требуется полное доказательство. Верный ответ баллами не оценивается.

В задаче 3 IX класса нахождение правильного ответа оценивается 3 баллами.

В задаче 1 X класса требуется полное доказательство. За идею использования принципа Дирихле – до 2 баллов.

В задаче 2 X класса требуется предъявить схему взвешиваний и доказать, что она ведёт к ответу

В задаче 3 X класса за установление неравенства для небольших значений  $n$  можно давать 1 балл. Также частичные баллы возможны при попытках обосновать монотонность. Способы решения могут быть основаны и на других идеях.

Задача 4 X класса оценивается по школьным критериям.

В задаче 5 X класса до 3 баллов даётся за верный ответ (для  $n = 15$ ), а также 1 - 2 балла можно давать за другие примеры, где  $n$  принимает большие значения.

В задаче 1 XI класса за рассмотрение системы равенств – 1 балл. За попытку анализа решений – ещё 1 - 2 балла.

В задаче 2 XI класса за нахождение двух корней даётся до 2 баллов.

В задаче 3 XI класса можно давать до 2 баллов за попытки индуктивного доказательства с верной формулировкой гипотезы.

В задаче 4 XI класса за нахождение верного значения даётся до 3 баллов. При наличии доказательства того, что это значение подходит – ещё 2 балла.

Задача 5 XI класса оценивается по школьным критериям.



# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### 6 класс (решения)

1. Ответ: 8%.

Одно пирожное обошлось в 20%, поэтому три пирожных составили 60% общей стоимости. Оставшиеся 40% составил чай. Поскольку стаканов было 5, один стакан составил 8%.

2. Ответ: третье место занял Миша.

Наташа не могла солгать, так как в противном случае никто не был последним. Значит, последней была она. Антон при этом сказал правду. Соглал или Миша, или Катя. Первое невозможно: получилось бы, что Миша был первым или последним. Но последнее место занято, то есть он был первым, и тогда Катя тоже солгала.

Итак, солгала Катя, а остальные сказали правду. Первым мог быть только Антон. Посередине — Миша и Катя. Поскольку третье место занял мальчик, это был Миша. Места расположились в порядке АКМН.

3. Ответ: 8 способов.

Все способы здесь анализируются вручную, то есть перебором. Можно поставить один крестик в центр (1 способ), можно поставить 4 крестика по углам (1 способ), можно поставить два крестика вдоль средней горизонтали или вертикали на клетки кроме центральной (2 способа), можно поставить два крестика в углы вдоль одной из крайних линий, и один крестик посередине противоположной линии (4 способа). Итого  $1 + 1 + 2 + 4 = 8$ .

4. Ответ: 65.

Разбивая сто игрушек на пятёрки стоящих подряд, видим, что в каждой из них есть хотя бы одна кукла, откуда кукол не меньше 20. Далее, находим одного медвежонка и берём рядом стоящую с ним игрушку. Остальные 98 игрушек делим на 14 частей по 7 подряд стоящих игрушек в каждой. На них приходится не менее 14 медвежат, а один был в начале. Итого медвежат не менее 15. Получается, что самолётиков не больше  $100 - 20 - 15 = 65$ .

Приведём пример с 65 самолётиками. Пусть куклы стоят под номерами 5, 10, ..., 100, кратными пяти. Медвежат расставим по номерам 1, 8, 14, 21, 28, 34, 41, 48, 54, 61, 68, 74, 81, 88, 94. Здесь каждый раз прибавляется по 7, но если номер оказывается кратен пяти, то мы заменяем его на предыдущий. Заметим, что в конце между 94 и 1 оказывается 6 номеров, то есть все условия выполняются. На оставшиеся 65 мест можно поставить самолётики.

5. Ответ: да, обязательно.

Рассмотрим вспомогательное заполнение доски  $8 \times 8$  без одной клетки плитками  $1 \times 3$ . Это возможно, если пустой оставить клетку с координатами (3, 3). Действительно, квадрат  $5 \times 5$  без центральной клетки покрывается четырьмя прямоугольниками  $2 \times 3$ , каждый из которых состоит из двух плиток. Оставшаяся часть может быть разделена на прямоугольники  $3 \times 8$  и  $3 \times 5$ , каждый из которых плитками покрывается. В итоге имеем 21 плитку. Кость домино может задевать максимум две выделенные плитки. Таким образом, если положить (вырезать) всего 10 костей домино, хотя бы одна из описанных выше плиток останется не задетой. По этому принципу её и вырезаем.

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### 7 класс (решения)

1. Ответ: в отношении  $3 : 10$ .

Пусть взято  $x$  единиц первого сплава и  $y$  единиц второго. Тогда  $70x + 5y = 20(x + y)$ , то есть  $50x = 15y$ , и  $x : y = 15 : 50 = 3 : 10$ .

2. Ответ: 9981.

Будем проверять числа, начиная с самых больших. Числа вида  $999a$  не подходят: если  $9^3a$  делится на  $a + 27$ , то и  $3^9 = 3^6(a + 27) - 9^3a$  делится, но тогда  $a + 27$  должно быть степенью тройки, а таких значений нет. Среди чисел  $998a$  получается, что  $9^2 \cdot 8a$  делится на  $a + 26$ . Подходит  $a = 1$ , и оно здесь наибольшее (достаточно рассмотреть случаи  $a = 2, 3, \dots, 9$  и убедиться, что они не подходят).

3. Пусть объём второго кувшина равен  $x$ , где надо отличить  $x = 3$  от  $x = 4$ . Наполняем первый кувшин, отливаем воду во второй. У нас остаётся  $5 - x$  литров. Это меньше  $x$ , поэтому опустошаем второй кувшин и наливаем в него  $5 - x$ . Эта вода вмещается. Теперь снова наполняем первый кувшин, и отливаем из него во второй до краёв. Долить придётся  $x - (5 - x) = 2x - 5$ , и тогда в первом кувшине останется  $5 - (2x - 5) = 10 - 2x$ . Теперь замечаем, что это 4, если  $x = 3$  (то есть больше  $x$ ), и 2, если  $x = 4$  (то есть меньше  $x$ ). Вторым кувшин снова опустошаем, и пытаемся перелить туда эти  $10 - 2x$ . Если вода вмещается, то  $x = 4$ . Если не вмещается, то  $x = 3$ .

4. Ответ: да можно.

Один из примеров приведён на рисунке:

1	1	3	2	2
1	2	3	1	2
3	2	1	1	3
3	2	2	2	3
1	1	3	3	1

Строятся такие примеры, как правило, "методом проб и ошибок".

5. Ответ: да, можно.

Удобно решать задачу с конца. Сумма всех чисел равна 55. Она должна делиться на последнее слагаемое, в качестве которого берём 5. Вычитая, имеем 50. Это сумма девяти слагаемых, и в качестве 9-го (предпоследнего) можно взять число 10. Вычитая, имеем 40, беря его делитель 8, и так далее.

Действуя описанным способом, нетрудно прийти к такой сумме:  $6 + 2 + 1 + 9 + 3 + 7 + 4 + 8 + 10 + 5$ . Она удовлетворяет условию.

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### 8 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

Число 2016 делится на 7, 8 и 9. Частное от деления на их произведение равно 4. Поэтому одна из идей состоит в том, чтобы получить в конце такое произведение, а из начальных цифр получить 2, и прибавить к нему. Вот одно из решений:  $1 - 2 + 3 + 4 \cdot (-5 + 6) \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2018$ .

Можно ту же идею реализовать и по-другому:  $1 \cdot 2 + (-3 - 4 + 5 + 6) \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2018$ .

2. Ответ: 13 гномов.

Если гномов было  $n$ , то на 4-м круге каждый взял на  $3n$  монет больше, чем на первом. Отсюда  $3n^2 = 507$ , то есть  $n = 13$ .

3. Ответ: да, могли.

Один из возможных примеров: пусть были написаны числа 3, 8, 4, 11, 6, 12, 1, 13. Тогда вписанные значения сумм равны 11, 12, 15, 17, 18, 13, 14, 16.

Идея построения примера такова: надо взять какую-нибудь перестановку чисел от 11 до 18 так, чтобы сумма чисел на чётных местах была равна сумме чисел на нечётных местах (это условие необходимо). После этого подбором найти исходные числа, следя за отсутствием повторений. Если повторения всё же возникают, то исходную перестановку немного модифицируем.

4. Ответ: да, верно.

Это утверждение верно не только для квадрата, но для любого клетчатого прямоугольника, в котором имеются закрашенные клетки. Если такая клетка всего одна, берём весь прямоугольник. Пусть имеются по меньшей мере две закрашенные клетки. Тогда у них различаются или номера строк, или номера столбцов. В первом случае имеется горизонтальный разрез по линиям клеток, при котором рассматриваемые две клетки оказываются в разных частях. Во втором случае имеется аналогичный вертикальный разрез. В каждой из частей получается меньшее количество закрашенных клеток, и при этом ненулевое. Применяя описанный способ разрезания к каждой из частей, получаем за конечное число шагов итоговое разрезание всей фигуры.

5. Ответ: да, могло.

Раскрасим в шахматном порядке квадрат  $12 \times 12$ . Допишем к нему слева красный столбец, а к тому, что получится, добавим снизу синюю строку. Ясно, что красный цвет преобладает в первых 12 строках и первом столбце, а синий — в последней строке и последних 12 столбцах. Никакая клетка квадрата  $12 \times 12$ , с которого мы начинали, доминирующей не будет. То же насчёт левой нижней клетки. Остаётся только по 12 доминирующих клеток из последней строки и из первого столбца; итого 24.

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### 9 класс (решения)

1. Ответ: да, может.

Пример: 395 делится на 79.

2. Ответ: да, существует.

Разобьём 20 камней на 10 пар. В каждой паре совершим взвешивание, сравнив два входящих в неё камня по весу. Более тяжёлые камни отложим в одну кучку, а более лёгкие — в другую. Ясно, что самый тяжёлый камень находится в первой кучке, а самый лёгкий — во второй.

Среди 10 камней мы за 9 взвешиваний можем выявить самый тяжёлый, проводя последовательные сравнения, и оставляя на каждом шаге камень самого тяжёлого веса среди тех, которые нам встречались. Аналогично за 9 взвешиваний выявляем самый лёгкий камень.

Итого нам потребовалось  $10 + 9 + 9 = 28$  взвешиваний. Известно, что это число является оптимальным, то есть за меньшее число взвешиваний результата в общем случае не достичь. Но в данной задаче такая проверка не требуется.

3. Ответ: 31 тетрадь в клетку и 26 в линейку.

Введём обозначения  $x, y$  для числа тетрадей в клетку и в линейку. Это целые неотрицательные числа. Тогда  $3x + 2y \leq 140$  и  $|x - y| \leq 9$ . Нам нужно максимизировать величину  $s = x + y$ . Выразим отсюда  $x = s - y$  и подставим в оба неравенства (помня, что  $s \geq y$ ). Получится  $3s - y \leq 140$  и  $|s - 2y| \leq 9$ , то есть  $2y - 9 \leq s \leq 2y + 9$ . Как следствие,  $3s - 140 \leq y \leq (s + 9)/2$ , то есть  $6s - 280 \leq s + 9$ ,  $5s \leq 289$ ,  $s \leq 57$  ввиду целочисленности.

Суммарное число купленных тетрадей не превосходит 57. Положим  $s = 57$  и найдём решение, откуда будет следовать, что это значение максимально. Мы теперь имеем  $y \geq 3s - 140 = 31$ , а также  $48 \leq 2y \leq 66$ , то есть  $31 \leq y \leq 33$ . Нас интересует минимально возможное значение  $y$ ; полагаем  $y = 31$ . Тогда  $x = 57 - 31 = 26$ . Проверяем, что получилось решение:  $3x + 2y = 78 + 62 = 140$ ;  $|x - y| = 5$ . Все условия выполнены. Значит, надо купить 31 тетрадь в клетку и 26 в линейку.

4. Ответ: нет, не может.

Пусть одна из трёх прямых обладает указанным свойством. По одну сторону от неё будут три части площадью  $x$ , по другую — 4 части площадью  $y$ . Рассмотрим любую из двух оставшихся прямых. По одну и по другую сторону от неё будут две части  $y$ , а три части  $x$  разделятся не поровну (по одну сторону  $x$ , по другую  $2x$ ). Значит, никакая из оставшихся прямых не может быть медианой. Далее считаем, что именно медиана  $CM$  обладает свойством, описанным в начале.

Рассмотрим два случая. Для начала пусть вершина  $B$  расположена в пределах треугольника, разбитого на 4 части площадью  $y$ . Тогда она делит этот треугольник на две части равной площади. Поэтому он равнобедренный:  $BM = BC$ . Отсюда  $BA : BC = 2 : 1$ , а это значит, что биссектриса делит весь треугольник на части, у которых отношение площадей именно такое. Но это не так, поскольку у большей из частей площадь равна  $2x + 2y$ , а у меньшей она равна  $x + 2y$ , то есть отношение строго меньше 2.

Теперь пусть  $B$  расположена в пределах другого треугольника. Она делит его на части площади  $x$  и  $2x$ . По свойству биссектрисы,  $BM : BC = 1 : 2$ , откуда  $BC = BA$ , то есть треугольник равнобедренный. Тогда  $BL$  — медиана, и делит треугольник на части равной площади, но это не так, поскольку площадь одной части равна  $2x + 2y$ , а другой  $x + 2y$ .

Таким образом, ответ отрицательный. Специфика того, что  $AN$  высота, нигде не использовалась.

5. Ответ: да, можно.

Один из примеров:  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 9$ ,  $d = 28$ . При этом  $ab + cd = 256 = 16^2$ ,  $ac + bd = 121 = 11^2$ ,  $ad + bc = 64 = 8^2$ .

Можно показать, что таких примеров имеется бесконечно много.



# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: нет, не может.

Сумма косинусов равна  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ . Оба косинуса положительны за счёт  $\alpha + \beta < \pi$ . Поэтому сумма косинусов двух углов треугольника всегда строго больше нуля.

2. Ответ: да, можно.

Таких примеров довольно много. Годаются, например, числа 1, 2,  $-3$ . Для любых перестановок, значение дискриминанта квадратного уравнения оказывается точным квадратом:  $1^2 - 4 \cdot 2(-3) = 5^2$ ,  $2^2 - 4 \cdot 1(-3) = 4^2$ ,  $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1^2$ .

Есть и другие решения: подходят, например, числа 1, 5,  $-6$ .

3. При  $k \geq 2$  справедлива оценка  $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ , из которой следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{N^2} &< \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \dots + \left( \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N} < \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Несколько первых членов суммы оставляем как есть, а для  $n = 4$  применяем полученное неравенство. Получается, что наша сумма меньше  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{61}{36} = 1,69(4) < 1,7$ .

4. Ответ:  $150^\circ$ .

Построим правильный треугольник  $KPM$ , где  $P$  лежит в той же полуплоскости с границей  $KM$ , что и  $L$ . Треугольники  $MLP$  и  $МОК$  равны по стороне  $MP = MK$  и двум прилежащим углам величиной 10 и 30 градусов. Отсюда  $ML = MO$ . Тогда в равнобедренном треугольнике с углом 40 градусов при вершине  $M$ , углы при основании равны 70 градусам. Величину угла  $KOM$ , равную 140 градусам, мы знаем, и тогда на  $KOL$  приходится  $360 - 70 - 140 = 150$  градусов.

5. Ответ: 3.

По условию,  $3n + 5n = 97 \cdot 25$ . Отсюда  $n$  делится на 5. Полагаем  $n = 5k$  и записываем уравнение в виде  $3k + m = 97 \cdot 5 = 485$ .

Пусть  $m - n = r$ , где  $|r|$  надо минимизировать. Это даёт  $485 = 3k + n + r = 8k + r$ . Остаток от деления на 8 числа 485 равен 5, откуда понятно, что минимум модуля достигается при  $r = -3$ .

Таким образом,  $k = 61$ ,  $n = 305$ ,  $m = 302$ . Пример с таким числом плиток легко привести. Из 300 плиток первого вида складываем прямоугольник  $36 \times 25$ . Из 300 плиток второго вида складываем прямоугольник  $60 \times 25$ . Остаётся одна строка  $1 \times 25$ , и её покрываем оставшимися пятью плитками первого вида и двумя плитками второго вида.

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## II (муниципальный) этап

2018 – 2019 учебный год

### 11 класс (решения)

1. Ответ: нет, не имеет.

Рассмотрим функцию  $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$ . Исследовать её на максимум в общем виде достаточно непросто, но это здесь не нужно, так как речь идёт об оценке.

Прежде всего, можно заметить, что  $|f(x)| \leq |\sin x \sin 2x| = 2 \sin^2 x |\cos x| = 2t(1-t^2)$ , где  $t = |\cos x| \in [0; 1]$ . Исследовать же на максимум функцию  $g(t) = t(1-t^2) = t - t^3$  на отрезке совсем легко: она равна нулю на его концах, а максимум достигается в критической точке, для которой  $g'(t) = 1 - 3t^2 = 0$ . Тогда  $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$  есть сама эта критическая точка, и значение функции в ней равно  $g(t) = \frac{2}{3}t = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

Таким образом, мы доказали неравенство  $|f(x)| \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}$ , и остаётся убедиться в том, что это значение меньше  $\frac{\pi}{4}$ . Числа здесь достаточно близки, и для сравнения хотелось бы избежать применения калькуляторов. Воспользуемся тем, что  $\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{48} < \frac{7}{4}$ , что даёт  $\frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3} < \frac{7}{9}$ , и далее всё следует из неравенства  $\frac{28}{9} = 3, (1) < 3, 14 < \pi$ .

2. Ответ: нет, не существует.

Допустим, что такой треугольник существует. Пусть  $a, b, c$  — его стороны,  $S$  — площадь. Тогда из формулы Герона следует, что  $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ , где в правой части стоит нечётное число. С другой стороны,  $2S = ah$  — нечётное целое число. Поэтому  $16S^2 = 4(ah)^2$  оказывается чётным числом — противоречие.

3. Ответ: 8615.

Наименьшее значение равно 150. Наибольшее равно  $150 + 151 + \dots + 200 = 8925$ , что вычисляется через формулу суммы арифметической прогрессии.

При этом не все промежуточные значения достигаются. Действительно, если взять один груз, то его вес от 150 до 200, а 201 уже никак не получить. Следующее значение будет  $150 + 151$ , и далее  $150 + 152, \dots, 199 + 200$ . Теперь снова идёт "пробел" до значения  $150 + 151 + 152 = 453$  из трёх грузов.

Общая закономерность такая: если взято сколько-то грузов, но при этом они не самые последние по весу, то мы вес одного из грузов можем увеличить на 1. "Пробелы" же будут только в начале: между 200 и  $150 + 151 = 301$  (100 чисел, от 201 до 300 включительно), потом между  $199 + 200 = 399$  и  $150 + 151 + 152 = 453$  (53 числа), и затем между  $198 + 199 + 200 = 597$  и  $150 + 151 + 152 + 153 = 606$  (8 чисел). Легко заметить, что других "пробелов" между группами уже не возникнет, и все числа пойдут подряд.

Окончательный ответ из сказанного легко находится. Это  $8925 - 149 - 100 - 53 - 8 = 8615$ .

4. Ответ: нет, не обязательно.

Построим контрпример, рассматривая такую схему. Занумеруем участников от 1 до 6, и пусть тройка  $i < j < k$  ходила в поход тогда и только тогда, когда сумма номеров  $i + j + k$  чётна. Например, 1, 2, 3 ходили вместе в поход, а 1, 2, 4 не ходили.

Поскольку среди чисел от 1 до 6 ровно по три чётных и нечётных, в любой четвёрке есть как чётное, так и нечётное число. Обозначим эти числа в виде  $A, B, X, Y$ , где  $A$  чётно и  $B$  нечётно. Тогда суммы чисел в тройках  $X + Y + A$  и  $X + Y + B$  имеют разную чётность. То есть в пределах четвёрки, найдутся как трое, которые вместе ходили в поход, так и трое, которые не ходили. Поэтому ответ на вопрос отрицательный.

5. Ответ:  $35/2$ .

Соединим центры окружностей между собой, получая треугольник, для которого точки  $B, C, D$  будут точками касания вписанной окружности. С помощью теоремы косинусов находим углы треугольника  $BCD$ . Косинусы углов принимают значения  $1/5, 5/7, 19/35$ . Нетрудно заметить, что при этом получаются синусы половинных углов треугольника с вершинами в центрах окружностей.

Теперь можно найти радиус каждой из окружностей, рассматривая равнобедренные треугольники, боковые стороны которых равны радиусам, основания даны в условии, а синусы половинных углов мы нашли. Радиусы оказываются соответственно равны  $(7/2) : (1/5) = 35/2$ ,  $(5/2) : (5/7) = 7/2$ ,  $(6/2) : (19/35) = 105/19$ . Наибольший из радиусов равен  $35/2$ .